令和５年度後期日程入学試験問題

総　合　問　題

理　学　部

注 意 事 項

① 試験開始の指示があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

② 問題冊子は，７ページ(表紙，白紙を除く)です。試験開始後，確認しなさい。

③ 解答は，別紙の解答用紙に記入しなさい。

④ 受験番号は，解答用紙の指定の欄に用紙ごとに正しく記入しなさい。

◇M7(304—27)

1 θ を媒介変数とする曲線 C

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \cos\theta \\ y = \sin 2\theta \sin\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。図1のように，曲線 C が直線 $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ と交わる点のうち，原点と異なる点をPとする。点Pにおける θ の値を α とする。以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。必要であれば，$\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ を用いてよい。

問 1　α を求めよ。

問 2　曲線 C の形状について，以下の(1)，(2)に答えよ。

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}$ および $\dfrac{dy}{d\theta}$ を求めよ。

(2) (1)の結果を利用して，曲線 C について，$0 \leqq \theta \leqq \alpha$ の範囲で $\dfrac{dy}{dx} \geqq 0$ となることを示せ。

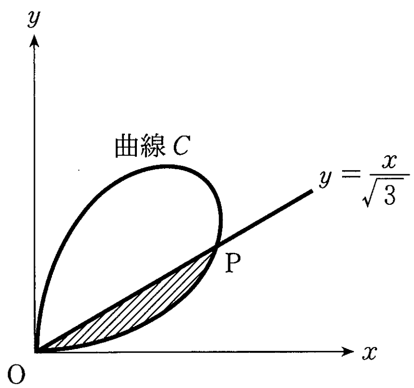

図1　曲線 C と直線 $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

問 3　曲線 C で囲まれた部分のうち，$y \leqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ を満たす部分(図 1 の斜線部分)の面積を S とする。この S を，以下の手順で求めよ。

(1)　次の 2 つの定積分を計算せよ。

$$I_1 = \int_0^{\alpha} \sin^2 2\theta \cos 2\theta \, d\theta, \qquad I_2 = \int_0^{\alpha} \sin^2 2\theta \sin^2 \theta \, d\theta$$

(2)　(1)の結果を利用して S を求めよ。

2 図2のように，斜面とそれに続く半径rの半円筒が水平な床の上に固定されており，その上をすべる質量mの小球の運動を考える。半円筒の中心軸上にある点Oを原点とし，半円筒の中心軸と直交し，かつ床と平行にx軸をとり，鉛直上向きにy軸をとる。半円筒の最下点$(0,\ -r)$を点Bとし，点Bと床の高さは等しいものとする。床からの高さがhの斜面上に点Aがあり，半円筒の最高点$(0,\ r)$を点Cとする。これらの点A，B，Cは全て，x軸とy軸を含む同一の鉛直面内にある。小球はこの鉛直面内で運動し，斜面とそれに続く半円筒の面との摩擦や空気抵抗は無視できるものとする。また，小球の大きさは無視できるものとする。重力加速度の大きさをgとし，以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。

問1 小球を点Aから静かにはなすと，小球は斜面をすべり落ちたのち，半円筒の面に沿って上昇を続けた。

(1) 半円筒の面上の点Dにおける小球の速さを求めよ。ただし，直線OBと直線ODがなす角度をθとする。

(2) 点Dにおいて小球が半円筒の面からうける垂直抗力の大きさを求めよ。

(3) 小球が半円筒の面から離れることなく上昇し続けて点Cを通過するためには，hがある高さh_0以上である必要がある。h_0を求めよ。

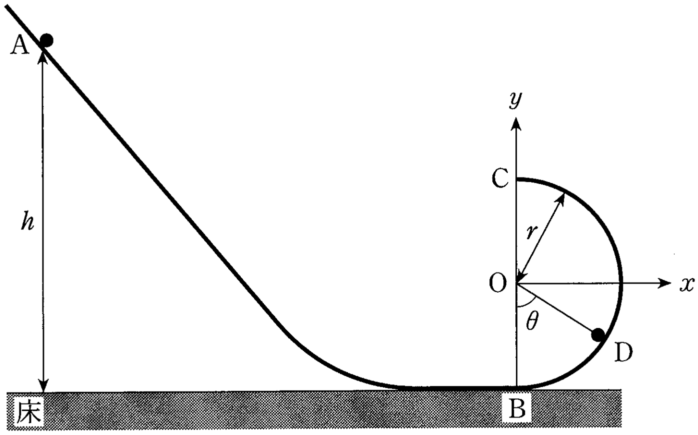

図2

問 2　図3のように，点O，点Bとx軸を含む鉛直面内で，床からの高さがh_1の斜面上に，点A_1がある。ただし，h_1は問1(3)で求めたh_0より小さい。小球を点A_1から静かにはなすと，小球は斜面をすべり落ちて半円筒の面に沿って上昇したのち，図3に示したように点Eで半円筒の面から離れ，破線で示したような軌跡の運動をした。このとき，直線OEとx軸がなす角度はβであった。

(1)　h_1をm，g，r，βの中から必要なものを用いて表せ。

(2)　点Eにおける小球の速度のx成分とy成分をそれぞれm，g，r，βの中から必要なものを用いて表せ。

(3)　小球が点Eから離れた後の軌跡の頂点Fのx座標とy座標をそれぞれm，g，r，βの中から必要なものを用いて表せ。

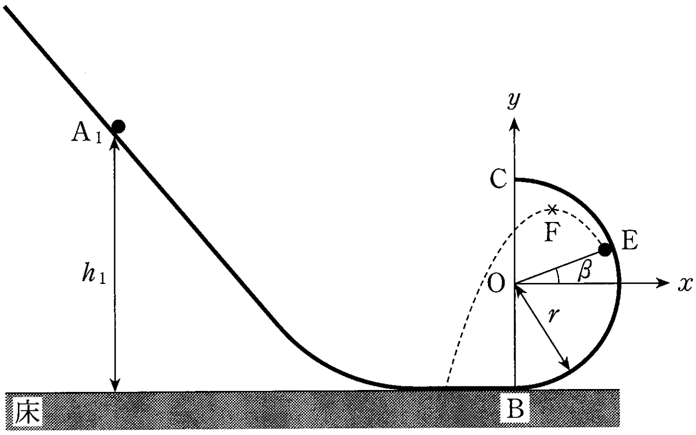

図3

3 図4に示すように，空気中に平面ガラス板をおき，その上に同じ材質でできた半径 R〔m〕のガラス球の一部を平面で切り取った平凸(とつ)レンズをのせた。平凸レンズ上面の平面部は平面ガラス板の上面と平行である。以下では，平凸レンズの下面を球面A，平面ガラス板の上面を平面Bとし，球面Aと平面Bが接する点をOとする。

図4に示すように，平凸レンズ上方から一様かつ平面Bに垂直に空気中の波長 λ〔m〕の単色光を入射させ，平凸レンズ上方から観察すると，同心円状の明暗の縞(しま)模様が見られた。これは，平面Bからの反射光と，球面Aからの反射光の干渉によってできる干渉縞である。なお，光は屈折率が小さい物質から屈折率が大きい物質に入射する面で反射する際に，位相が π rad ずれる性質がある。

R は干渉縞が見られた範囲より十分大きく，空気の屈折率を1.0，ガラスの屈折率を1.5として，以下の問に答えよ。解答は導出過程も含めて記述せよ。

問 1　点Oから平面Bに沿って r〔m〕だけ離れたところにおける球面Aと平面Bの間隔 d〔m〕を，r と R を用いて表せ。その際，d は R に比べて十分小さいことを考慮した近似を用いよ。必要であれば，p を実数として，$|x| \ll 1$ のときに $(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$ と近似できることを用いて良い。

問 2　点Oから平面Bに沿って r だけ離れたところの上方において，球面Aおよび平面Bからの二つの反射光が強めあう条件と弱めあう条件を，m を0以上の整数として，m，r，R，λ を用いて表せ。

問 3　入射光の波長が $\lambda = 6.0 \times 10^{-7}$ m のとき，上方から観察すると最も内側の明るい縞が $r = 0.90 \times 10^{-3}$ m にあった。R を求めよ。

問 4　平凸レンズと平面ガラス板の間を屈折率 n（ただし，$1.0 < n < 1.5$）の液体で満たしたところ，同心円状の干渉縞の半径が変化した。このときにできる明るい縞の半径 r_1〔m〕を，0以上の整数 m，R，λ，n を用いて表せ。

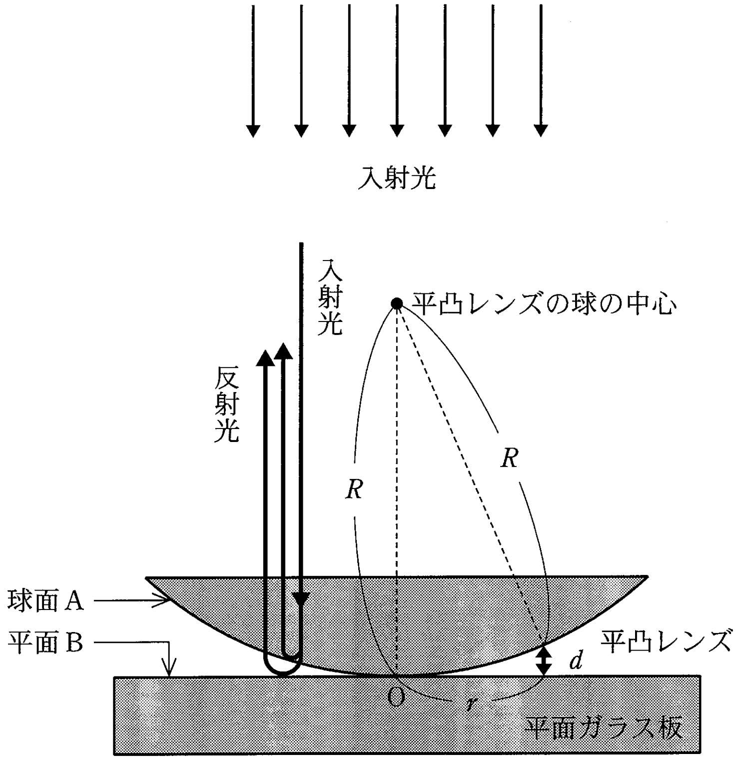

図 4

問 5　次に，液体を完全に取り去り，図 5 のように平面ガラス板の下方から一様かつ平面 B に垂直に空気中の波長 λ の単色光を入射させ，透過光を上から観察した。この場合にも，2 つの透過光による干渉縞が見られた。問 3 までで考えていた反射光の場合の干渉縞と比べ，見え方の違いがあるか，あれぱどのような違いがあるかを，理由を含めて説明せよ。

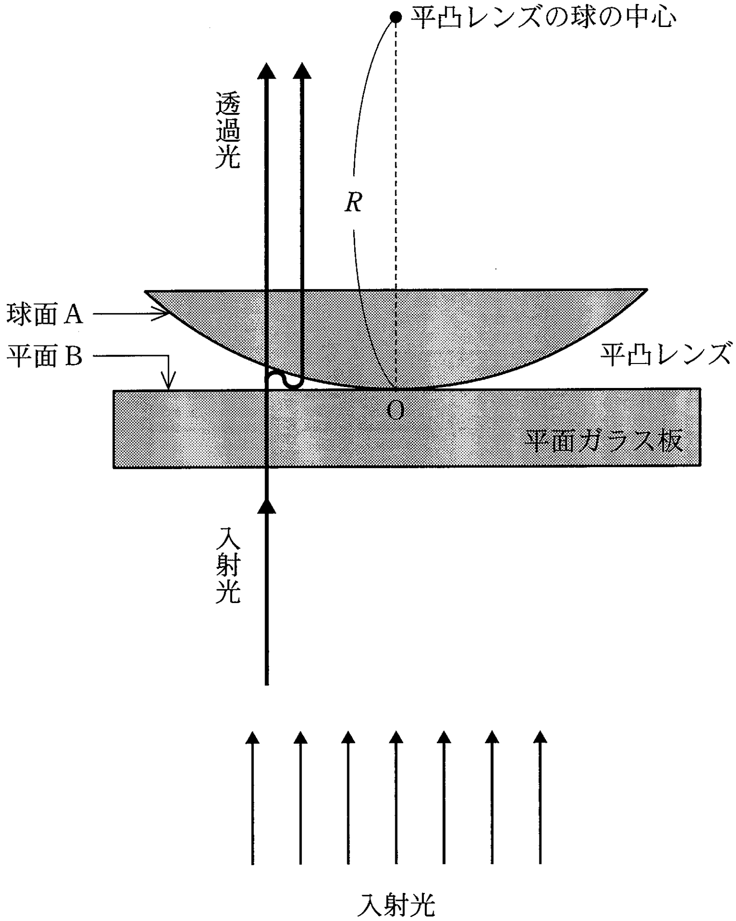

図 5